TD Fonctions réelles et inégalités

Équations et inéquations

ZLV **Exercice 1** Résoudre les équations et inéquations.

1. $-x^2+2x-3\leq a$
2. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}=1$
3. $\lfloor\sqrt{X^2+1}\rfloor=2$

148 **Exercice 2** Résoudre l'inéquation

1. $x^4-2x^2-3\leq 0$
2. $x+\sqrt{x}-2\leq 0$

5DQ **Exercice 3** Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln(x-1)+\ln(2x+1)=1$
2. $(\sqrt{x})^x=x^{\sqrt{x}}$
3. $2^x+3^x=5$

T8Z **Exercice 4** Résoudre sans justifier les équations et inéquations

1. $\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\sin x=\sin a$
3. $\cos(5x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\tan x\geq 1$

IVJ **Exercice 5**

1. Rappeler une formule de trigonométrie reliant $\cos^2\theta$ et $\cos 2\theta$.
2. Déterminer $\arccos\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}}$.

6S4 **Exercice 6** Résoudre

1. $3\tan x=2\cos x$
2. $\sin(2x+\frac{\pi}{3})=\sin(x-\frac{\pi}{2})$

Y8E **Exercice 7** Résoudre l'équation

1. $\arcsin x+\arcsin\sqrt{1-x^2}=\frac{\pi}{2}$
2. $\arctan x+\arctan 2x=\frac{\pi}{4}$

Partie entière et densité

HHC **Exercice 8** Soit f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x-\frac{\lfloor x^2\rfloor}{x}$.

1. Trouver, pour $x>0$, un encadrement de $f(x)$.
2. Que peut-on en déduire quant au caractère majoré, minoré de la fonction f ?
3. Montrer que f est bornée.

O8Z **Exercice 9**

1. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{Z},\quad \lfloor x+n\rfloor=\lfloor x\rfloor+n$.
2. Montrer que pour $x,y\in\mathbb{R},\quad \lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor\leq\lfloor x+y\rfloor\leq\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1$.
3. Majorer et minorer de même $\lfloor x_1+\cdots+x_n\rfloor$, où $x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$.
4. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in\mathbb{R},\ \lfloor\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\rfloor=\lfloor x\rfloor$.

KSL **Exercice 10** On note $\mathcal{D}_2=\{\frac{p}{2^q},\ p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N}\}$ l'ensemble des nombres dyadiques. Montrer que $\mathcal{D}_2$ est dense dans $\mathbb{R}$.

810 **Exercice 11** ★ ♣ Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ irrationnel. Pour $x\in\mathbb{R}$, on note $\{x\}$ la partie fractionnaire de x.

1. Montrer que $\forall\varepsilon>0,\ \exists n\in\mathbb{N},\ 0<\{\alpha n\}\leq\varepsilon$.
2. En déduire que $\big\{\{\alpha n\},\ n\in\mathbb{N}\big\}$ est dense dans $[0,1]$.

HCQ **Exercice 12** ★ ★ Théorème de Beatty Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+^*$, montrer que les suites $(\lfloor\alpha n\rfloor)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\lfloor\beta n\rfloor)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$ si et seulement si α,β sont irrationnels et $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$.

Valeur absolue

1KU **Exercice 13** ♣ Soit $P(t)=t^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kt^k$ une fonction polynomiale unitaire.

1. Si $x\in\mathbb{R}$ est une racine de P (c'est-à-dire $P(x)=0$), montrer que $|x|^n\leq\sum\limits_{k=0}^{n-1}|a_k||x|^k$.
2. En déduire que toute racine de P vérifie $|x|\leq\max\left(1,\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\right)$.

   Indication : *Considérer une racine vérifiant $|x|\geq 1$, et utiliser la question précédente pour montrer que $|x|\leq\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|$.*

4LV **Exercice 14** Soit $n\geq 1$.

1. Montrer que pour $x,y\geq 0,\quad (x+y)^{1/n}\leq x^{1/n}+y^{1/n}$.
2. Établir successivement $\quad\forall x,y\geq 0,\quad \left|x^{\frac{1}{n}}-y^{\frac{1}{n}}\right|\leq|x-y|^{\frac{1}{n}}\quad$ et $\quad\forall x,y\in\mathbb{R},\quad \left||x|^{\frac{1}{n}}-|y|^{\frac{1}{n}}\right|\leq|x-y|^{\frac{1}{n}}$.

2O8 **Exercice 15** ★ Soient $x_0,\ldots,x_{10}\in\mathbb{R}$ deux à deux distincts. En quelle·s valeur·s de x la fonction $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{10}|x-x_k|$ est-elle minimale ?

Propriétés de fonctions

E19 **Exercice 16** Soit $f\colon x\mapsto\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$. Montrer que f est impaire.

E71 **Exercice 17** Soit $f\colon I\to J$ une fonction réelle bijective deux fois dérivable convexe, de dérivée >0. Montrer que f^{-1} est concave.

8AR **Exercice 18** Montrer qu'il existe une unique fonction $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)+2^{f(x)}=x$. Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.

3TL **Exercice 19** ★ Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dont le graphe admette deux centres de symétrie.

1. À partir de f, définir une fonction g impaire admettant un autre centre de symétrie.
2. Montrer que f est la somme d'une fonction affine et d'une fonction périodique.

Études de fonctions

L51 **Exercice 20** Donner l'ensemble de dérivabilité et calculer les dérivées de

1. $f_1 : x \mapsto x^x$
2. $f_2 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $f_3 : x \mapsto e^{\sqrt{\arcsin x}}$
4. $f_4 : x \mapsto \arctan \frac{1}{1+x^2}$

KWM **Exercice 21** ♣ On considère la fonction $f : x \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. L'expliciter.

4M8 **Exercice 22** On considère la fonction tangente hyperbolique, définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ \tanh(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x}$.

1. Tracer l'allure des graphes des fonctions $\cosh$ et $\sinh$.
2. Montrer que la fonction $\tanh$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser. On note $\operatorname{argtanh} : I \to \mathbb{R}$ la bijection réciproque. Tracer l'allure du graphe de $\tanh$, en précisant la tangente en 0, et celui de $\operatorname{argtanh}$.
3. Justifier brièvement (mais précisément) que $\operatorname{argtanh}$ est dérivable, et montrer que $\forall x \in I,\ \operatorname{argtanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.
4. Pour $x \in I$, exprimer $\operatorname{argtanh}(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

5R6 **Exercice 23**

1. Que vaut $\lim\limits_{u \to 0} \frac{\ln(1+u)}{u}$?
2. Soit $a > 0$. Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (1+ax)^{1/x} \end{array}$ est décroissante.
3. Soit $u_n = (1 + \frac{a}{n})^n$. Montrer que (u_n) est croissante et converge vers e^a.

7H3 **Exercice 24** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0,\ e^x \geq \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

02C **Exercice 25** Moyenne logarithmique

1. Montrer que pour tout $y > 0$, $\quad 1 \leq \dfrac{\sinh y}{y} \leq \cosh y$.
2. En déduire que pour tout $x > 0$ et $x \neq 1$, $\quad x^{1/2} \leq \dfrac{x-1}{\ln x} \leq \dfrac{1}{2}(x+1)$.
3. En déduire que pour tous $a \neq b$ strictement positifs, $\quad \sqrt{ab} \leq \dfrac{b-a}{\ln b - \ln a} \leq \dfrac{b+a}{2}$.

CT9 **Exercice 26** Soit $\alpha \in [0,1]$.

1. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}_+,\ (x+y)^\alpha \leq x^\alpha + y^\alpha$.
2. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}_+,\ \frac{x^\alpha + y^\alpha}{2} \leq (\frac{x+y}{2})^\alpha$.

Pour $\alpha \geq 1$, les deux inégalités sont renversées.

Cauchy-Schwarz et convexité

6BS **Exercice 27**

1. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Montrer que pour $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $x_1, \dots, x_n > 0$, on a $\quad \dfrac{a_1^2}{x_1} + \cdots + \dfrac{a_n^2}{x_n} \geq \dfrac{(a_1 + \cdots + a_n)^2}{x_1 + \cdots + x_n}$.

ON8 **Exercice 28**

1. Étudier la convexité de $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$.
2. Montrer que pour $x_1, \dots, x_n > 0$, on a $\quad 1 + \left(\prod\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod\limits_{k=1}^{n} (1 + x_k)\right)^{1/n}$. **Ind** : *Poser $x_k = e^{y_k}$.*
3. Montrer que pour $a_1, \dots, a_n > 0$ et $b_1, \dots, b_n > 0$, $\quad \left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} + \left(\prod\limits_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k)\right)^{1/n}$.

HYA **Exercice 29** ★ Soit deux ensembles $\mathcal{L}$ de N droites et $\mathcal{P}$ de N points dans le plan, et $I = \sum\limits_{p \in \mathcal{P}, \ell \in \mathcal{L}} \delta_{p\ell}$, où $\delta_{p\ell} = \begin{cases} 1 \text{ si } p \in \ell \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que $I^2 \leq N \sum\limits_{\ell, \ell'} \sum\limits_{p} \delta_{p\ell} \delta_{p\ell'}$.
2. En déduire que $I \leq \sqrt{2} N^{3/2}$.

Autres

0OI **Exercice 30** Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, avec $b, d > 0$. On suppose que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Montrer que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

EXM **Exercice 31** Soit $0 \leq \alpha \leq \beta$ des réels, et $x \in \mathbb{R}$.

1. Comparer $|x|^\alpha$ à 1 selon la valeur de $|x|$. Justifier.
2. Montrer que $|x|^\alpha \leq 1 + |x|^\beta$.

QRS **Exercice 32** Pour $n \geq 1$, on note $\tan^{(n)}$ la dérivée n-ième de $\tan$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan^{(n)}(x) \geq 0$.

130 **Exercice 33** Inégalité de Nesbitt

1. Montrer que pour $x, y > 0$, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.
2. ★ En déduire que pour $a, b, c > 0$, on a

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Indication : *Faire apparaître $\frac{a+b+c}{b+c}$, et multiplier par 2.*

BIJ **Exercice 34** ★ ★ Inégalité du réordonnement

Soient $a_1 \leq \cdots \leq a_n$ et $b_1 \leq \cdots \leq b_n$. Montrer que pour toute permutation σ de $[\![1, n]\!]$, on a $\quad \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \sum\limits_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)} b_i$.